ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1994

MATHÉMATIQUES

**DEUXIÈME ÉPREUVE**
**OPTION P'**
**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - P'.*
*L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'options P', comporte 5 pages.*

Soit $\mathcal{C}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions complexes continues définies sur la droite réelle. La lettre a désigne un réel strictement positif donné. À toute fonction f de $\mathcal{C}$, faisons correspondre la fonction $\varphi_a(f)$ définie sur la droite réelle par la relation (I) :

$$\text{(I)} \qquad \varphi_a(f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x-t)\,dt.$$

## Première partie

Propriétés générales de la fonction $\varphi_a(f)$ ; valeurs propres et vecteurs propres de la restriction de $\varphi_a$ à l'espace des applications polynômes.

I-1°) Démontrer que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}$, la fonction $\varphi_a(f)$ est aussi définie par la relation :

$$\text{(II)} \qquad \varphi_a(f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt\ .$$

On suppose que, dans un repère donné, le graphe de la fonction f est symétrique par rapport à la droite d'abscisse $x_0$ ou par rapport au point de coordonnées $(x_0, 0)$ ; démontrer qu'il en est de même de celui de la fonction $\varphi_a(f)$.

I-2°) Déterminer les fonctions $\varphi_a(f)$, $\varphi_a(g)$ et $\varphi_a(h)$ lorsque f, g et h sont les fonctions :

- $f(x) = x$ .
- $g(x) = \sqrt{|x|}$ ; déterminer un infiniment grand équivalent à $\varphi_a(g)(x)$ à l'infini.
- $h(x) = \sin(\omega x)$ ; $\omega$ est un réel différent de zéro.

Déterminer la fonction $\varphi_a(k)$ lorsque k est une fonction de $\mathcal{C}$, périodique, de période 2a.

I-3°) Démontrer que la fonction $\varphi_a(f)$ est continûment dérivable. On pourra utiliser la fonction F définie à partir d'une fonction f de $\mathcal{C}$ par la relation :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Démontrer que l'application $\varphi_a : f \mapsto \varphi_a(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$ de cet endomorphisme.

I-4°) Soit f une fonction de classe $C^n$ (c'est-à-dire n-fois continûment dérivable) ; démontrer que la fonction $\varphi_a(f)$ est au moins de classe $C^{n+1}$.

I-5°) Par abus d'écriture désignons par $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications polynômes complexes de degré inférieur ou égal à l'entier n ($n \geq 1$).

a. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ de l'espace $\mathcal{C}$ est stable par l'application $\varphi_a$.

b. Soit $M_a$ la matrice associée à la restriction de l'application $\varphi_a$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ dans la base canonique $1, X, X^2, \ldots X^n$. Démontrer que cette matrice est triangulaire. Préciser sa diagonale principale. Quels sont les termes différents de 0 de cette matrice ? Déterminer les valeurs propres de la matrice $M_a$ et le rang de la matrice $M_a - I_{n+1}$ ($I_{n+1}$ est la matrice unité d'ordre n+1).

c. Rechercher les applications polynômes de degré 1 invariantes par l'application $\varphi_a$. Existe-t-il des polynômes de degré supérieur à 1 invariants par l'application $\varphi_a$ ?

d. Déduire des résultats précédents que le sous-espace vectoriel des applications polynômes de $\mathcal{C}$ est stable par $\varphi_a$ ; démontrer que cette restriction est un automorphisme. Préciser l'ensemble des valeurs propres de la restriction de $\varphi_a$ à ce sous-espace vectoriel.

## Deuxième partie

Propriétés de la fonction $\varphi_a(f)$ lorsque f est une fonction bornée.

Soit $\mathcal{B}$ le sous-espace vectoriel des fonctions f de $\mathcal{C}$ qui sont bornées sur toute la droite réelle. Cet espace vectoriel $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel normé (c'est un résultat admis) lorsqu'il est muni de la norme, dite de la convergence uniforme, définie par la relation :

$$\|f\| = \sup\{\, |f(x)| \mid x \in \mathbb{R} \,\}.$$

II-1°) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ est stable par l'application $\varphi_a$.

II-2°) Démontrer que la restriction de l'application $\varphi_a$ (encore notée $\varphi_a$) à l'espace vectoriel normé $(\mathfrak{B}, \|\ \|)$ est une application linéaire lipschitzienne de $\mathfrak{B}$ dans lui-même. Justifier l'existence et préciser la valeur du réel C défini par la relation :

$$C = \sup\left\{ \frac{\|\varphi_a(f)\|}{\|f\|} \mid f \in \mathfrak{B} \right\}.$$

## Troisième partie

Propriétés de la fonction $\varphi_a(f)$ lorsque f est une fonction périodique.

Soit D l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur la droite réelle périodiques et de période $2\pi$, continues par morceaux et de discontinuités régulières : un élément f de D est une fonction complexe $2\pi$-périodique possédant les deux propriétés :

- il existe une subdivision de l'intervalle $[0, 2\pi]$ définie par des réels $x_i$, $0 \le i \le n$,
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 2\pi,$$
tels que la restriction de la fonction f à chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ soit une fonction continue prolongeable par continuité en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$.

- la valeur de la fonction f au point $x_i$ est la demi-somme des limites à droite et à gauche de la fonction f en ce point : $f(x_i) = \frac{1}{2}(f(x_i+0) + f(x_i-0))$.

À toute fonction f de D, on associe la fonction $\varphi_a(f)$ définie par la relation (I). Les résultats de la question I-1° sont toujours valables.

III-1°) Démontrer que, pour toute fonction f de D, la fonction $\varphi_a(f)$ est continue et de classe $C^1$ par morceaux et que l'application $\varphi_a : f \mapsto \varphi_a(f)$ est un endomorphisme de D.

III-2°) Exemple : soit g la fonction périodique, de période $2\pi$, définie sur l'intervalle $[0,2\pi]$ par les relations :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \pi}{2}, & \text{si } 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ou si } x = 2\pi. \end{cases}$$

Déterminer le développement en série de Fourier de cette fonction g (à l'aide de sinus). Déterminer la fonction $\varphi_a(g)$ en supposant que le réel a est strictement inférieur à $\pi$. Vérifier qu'elle est continue.

III-3°) On admet que l'application de D×D dans $\mathbb{C}$ définie par la relation :

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt ,$$

est un produit scalaire hermitien. La norme déduite de ce produit scalaire est notée N ; $N(f) = \sqrt{(f \mid f)}$ . Désignons par $e_n$, pour n entier relatif, la fonction $x \mapsto \exp(inx)$ et posons : $c_n(f) = (e_n \mid f)$.

a. Comparer, pour deux fonctions f et g continues de D, les produits scalaires

$$(\varphi_a(f) \mid g) \text{ et } (f \mid \varphi_a(g)).$$

Le résultat obtenu sera admis pour deux fonctions f et g quelconques de D.

b. En déduire, pour une fonction f quelconque de D, une relation entre le coefficient de Fourier $c_n(\varphi_a(f))$ de la fonction $\varphi_a(f)$ et le coefficient de Fourier $c_n(f)$. Établir, pour tout entier n différent de 0, l'inégalité :

$$|c_n(\varphi_a(f))| \leq \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f)|^2\right).$$

Démontrer que la série de Fourier de la fonction $\varphi_a(f)$ est uniformément convergente. Retrouver ce résultat en utilisant les propriétés de la fonction $\varphi_a(f)$ établies à la question III-1°.

c. En déduire une inégalité entre les normes des fonctions $\varphi_a(f)$ et f. Est-ce que l'endomorphisme $\varphi_a$ de l'espace hermitien (D, ( | )) est une application lipschitzienne ?

d. Démontrer que l'endomorphisme $\varphi_a$ admet une infinité dénombrable de valeurs propres. En déduire une condition suffisante sur a pour que l'endomorphisme $\varphi_a$ ne soit pas injectif.

e. Est-ce que l'endomorphisme $\varphi_a$ de D est surjectif ?

## Quatrième partie

Construction d'une suite de fonctions définie par des applications $\varphi_{a_n}$ convergeant vers une fonction indéfiniment dérivable nulle à l'extérieur d'un intervalle.

Pour tout entier naturel n, désignons par $\mathfrak{D}^n$ le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathfrak{C}$ qui sont de classe $C^n$ et qui sont nulles à l'extérieur d'un intervalle fermé. Chaque fonction f de $\mathfrak{D}^n$ est nulle à l'extérieur d'un intervalle $[\alpha , \beta]$ qui dépend de la fonction considérée.

IV-1°) Vérifier brièvement que ces ensembles sont emboités : $\mathfrak{D}^0 \supset \mathfrak{D}^1 \supset \mathfrak{D}^2 \supset \cdots \mathfrak{D}^n \supset \cdots$ .

Soit $\mathfrak{D}^\infty$ l'intersection de tous les ensembles $\mathfrak{D}^n$ lorsque n varie de 0 à l'infini.

IV-2°) Établir que, pour tout a, l'image de l'ensemble $\mathfrak{D}^n$ par l'application $\varphi_a$ est contenue dans $\mathfrak{D}^{n+1}$. Comparer pour une fonction f quelconque de l'ensemble $\mathfrak{D}^0$ les deux intégrales :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad I_a = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(f)(x)\,dx\ .$$

IV-3°) Démontrer que, si f est une fonction appartenant à $\mathfrak{D}^n$, il existe, pour tout a, deux fonctions $F_1$ et $F_2$ de classe $C^n$ définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$F_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} f(x-(2p+1)a)\ ;\ F_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} f(x+(2p+1)a)\ .$$

IV-4°) Démontrer que la restriction de $\varphi_a$ à l'ensemble $\mathfrak{D}^n$ est une application injective et que l'espace image est l'ensemble des fonctions g de $\mathfrak{D}^{n+1}$ qui vérifient, pour tout x, la relation : $\sum_{p=0}^{\infty} \{g'(x+(2p+1)a) + g'(x-(2p+1)a)\} = 0\ .$

Démontrer que l'espace image $\varphi_a(\mathfrak{D}^n)$ est distinct de l'ensemble $\mathfrak{D}^{n+1}$. Considérer, pour un entier q convenable, la fonction nulle à l'extérieur de l'intervalle [–a , a] définie dans cet intervalle par la relation : $f(x) = (x^2 - a^2)^q$.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $f_0$ une fonction de $\mathfrak{D}^0$ ; considérons la suite de fonctions dont le premier terme est cette fonction $f_0$ et les termes suivants sont définis par la relation de récurrence :

$$f_{n+1} = \varphi_{a_n}(f_n)\ .$$

Soit k un entier naturel donné et n un entier supérieur ou égal à k ; désignons par $f_n^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction $f_n$.

IV-5°) Vérifier que toute fonction $f_n^{(k)}$, $n \geq k$, appartient à l'espace vectoriel normé $(\mathfrak{B}, \|\ \|)$. Démontrer que la suite des nombres réels $(\|f_n^{(k)}\|)_{n\geq k}$ est une suite décroissante.
Établir que ces fonctions $f_n^{(k)}$ vérifient, pour tout entier naturel k et tout entier n supérieur ou égal à k+1, l'inégalité :

$$\|f_{n+1}^{(k)} - f_n^{(k)}\| \leq \frac{a_n}{2}\ \|f_n^{(k+1)}\|\ .$$

IV-6°) En déduire que si la série de terme général $a_n$, $n\in\mathbb{N}$, est une série convergente, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f appartenant à $\mathfrak{D}^\infty$. Donner une condition suffisante sur la fonction $f_0$ pour que la fonction f limite ne soit pas nulle.

FIN DU PROBLÈME